Contact
Dit document is samengesteld door onderwijsbureau Bijles en Training. Wij zijn DE expert op het gebied van bijlessen en trainingen in de exacte vakken, van VMBO tot universiteit. Zowel voor individuele lessen op maat als voor doelgerichte groepstrainingen die je voorbereiden op een toets of tentamen. Voor meer informatie kun je altijd contact met ons opnemen
via onze website: **http://www.wiskundebijlessen.nl**
of via e-mail: **marc_bremer@hotmail.com**.

De basiselementen van wachttijdtheorie zijn:

1. aankomstpatroon
2. bedieningstijd
3. structuur wachtrij

Wat we als eerste zullen bespreken is de enkelvoudige wachtrij met 1 loket. Bij het bespreken van dit model maken we een fors aantal aannames:

1. De klant die als eerste binnenkomt wordt als eerste geholpen
2. Het aankomstpatroon volgt een Poissonproces
3. De bedieningstijd volgt een Poissonproces
4. Er is een onbeperkt aantal potentiele klanten
5. Er is een onbeperkte wachtruimte

6. We gaan uit van een stabiele situatie

Bij een Poissonproces verdelen we de tijd op in kleine intervallen Δt.
In ieder interval is er of wel, of niet een aankomst. De kans op meer dan 1 aankomst is verwaarloosbaar klein.
Meer formeel is er sprake van een Poissonproces als:

1. De kans dat er geen aankomst is gelijk is aan $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t$.
2. De kans dat er 1 aankomst is gelijk is aan $P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t$.
3. Voor 2 intervallen Δt zijn de kansen op een aankomst onafhankelijk.
4. De aankomst van klanten is onafhankelijk van de rijlengte.

Bij een Poissonproces zijn 2 kansverdelingen belangrijk; de Poissonverdeling en de exponentiele verdeling. De Poissonverdeling vertelt je wat de kans is op een bepaald *aantal* aankomsten binnen een gegeven tijdsduur.
De (cumulatieve) exponentiele verdeling verteld je wat de kans is dat er een aankomst is
binnen een bepaalde *tijdsduur*.

De formule voor de Poissonverdeling:

$P(\underline{k} = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$

De formule voor de (cumulatieve) exponentiele verdeling:

$P(t \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$

Een paar losse opmerkingen:

1. Voor de bedieningstijden gebruiken we μ in plaats van λ
2. λ en μ zijn het gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid.
3. $\frac{1}{\lambda}$ en $\frac{1}{\mu}$ zijn de gemiddelde tussenaankomsttijden.

Wat we in dit hoofdstuk *uiteindelijk* willen bereiken is kunnen uitrekenen of de kosten voor het inzetten van extra capaciteit opwegen tegen de opbrengsten van het korter worden van de wachtrijen. Om dat te bereiken willen we met name de gemiddelde lengte van en de gemiddelde wachttijd in de wachtrij berekenen.

Let erop dat in plaats van 'wachtrij' en 'wachttijd' soms ook gesproken wordt over 'systeem' en 'systeemtijd'. In dat laatste geval kijken we naar wachtrij + persoon die geholpen wordt.

Dan nu de berekening van de lengte van de wachtrij en de wachttijd:

Als er in een gegeven tijdsintervalletje Δt n mensen in het systeem zitten dan kan dit vanuit het vorige tijdsinterval op 4 manieren bereikt zijn:

1	1 aankomst, 0 afgeronde bedieningen en er zaten $n-1$ mensen in het systeem	$p_n = \lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)p_{n-1}$	$= \lambda\Delta t p_{n-1}$
2	0 aankomsten, 1 afgeronde bediening en er zaten $n+1$ mensen in het systeem	$p_n = (1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t p_{n+1}$	$= \mu\Delta t p_{n+1}$
3	1 aankomst, 1 afgeronde bediening en er zaten n mensen in het systeem	$p_n = \lambda\Delta t\mu\Delta t p_n$	$= 0$
4	0 aankomsten, 0 afgeronde bedieningen en er zaten n mensen in het systeem	$p_n = (1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)p_n$	$= (1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)p_n$

NB. $(\Delta t)^2 = 0$ omdat Δt heel klein is.

p_n is de som van de vier kansen in de rechterkolom.

De belangrijke conclusie die we hieruit kunnen trekken is dat we p_{n+1} weten als we p_n en p_{n-1} weten. Oftewel:

1. Als we p_0 weten, weten we p_1.
2. Als we p_0 en p_1 weten, weten we p_2.
3. Als we p_1 en p_2 weten, weten we p_3.

3. Als we p_2 en p_3 weten, weten we p_4.
4. Kortom: als we p_0 weten, weten we alle kansen.
5. En we weten p_0, omdat de som van alle kansen 1 moet zijn.

Conclusie, met enige wiskunde:

$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$